

8. PUISSANCES DU NOMBRE D'OR ET DE SON INVERSE.

a) Les puissances successives du nombre d'or :

Il est intéressant de remarquer que les puissances successives du nombre d'or ϕ s'expriment en utilisant les termes successifs de la suite de Fibonacci.

En effet : $\phi^2 = \phi + 1$,

$$\phi^3 = \phi^2 \cdot \phi = (\phi + 1) \phi = \phi^2 + \phi = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi^3 \cdot \phi = (2\phi + 1) \phi = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi^4 \cdot \phi = (3\phi + 2) \phi = 3\phi^2 + 2\phi = 3(\phi + 1) + 2\phi = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi^5 \cdot \phi = (5\phi + 3) \phi = 5\phi^2 + 3\phi = 5(\phi + 1) + 3\phi = 8\phi + 5$$

$\phi^2 = \phi + 1$
$\phi^3 = 2\phi + 1$
$\phi^4 = 3\phi + 2$
$\phi^5 = 5\phi + 3$
$\phi^6 = 8\phi + 5$

Et : $\phi^{n-1} + \phi^{n-2} = \phi^{n-2}(\phi + 1) = \phi^{n-2} \cdot \phi^2 = \phi^n$, donc

$\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}$

Considérons la suite de Fibonacci u déterminée par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Alors on peut écrire, concernant les puissances de ϕ , si $n \geq 2$:

$\phi^n = u_{n-2} + u_{n-1} \cdot \phi$

Cela résulte d'un raisonnement par récurrence.

En effet, cette propriété a été vérifiée pour les premières puissances de ϕ . Il suffit de démontrer que si elle est vraie pour n et $n+1$, alors elle est vraie pour $n+2$.

En effet si $\phi^n = u_{n-2} + u_{n-1} \cdot \phi$ et $\phi^{n+1} = u_{n-1} + u_n \cdot \phi$, alors : $\phi^{n+2} = \phi^n + \phi^{n+1}$, donc :

$$\phi^{n+2} = (u_{n-2} + u_{n-1}) + (u_{n-1} + u_n) \cdot \phi = u_n + u_{n+1} \cdot \phi, \text{ donc cela est réalisé.}$$

b) Une expression du terme général de la suite de Fibonacci.

Toujours avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, considérons son « nombre conjugué » : $\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Alors la suite de Fibonacci u déterminée par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ peut s'exprimer par :

$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1} \right)$

En effet : $\phi^{-n} = u_{n-2} + u_{n-1} \cdot \bar{\phi}$, d'après les propriétés du nombre conjugué, et on a :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (u_{n-1} \phi + u_n \phi^2 - u_{n-1} \bar{\phi} - u_n \bar{\phi}^2) = \frac{1}{\sqrt{5}} u_n (\phi - \bar{\phi}) = \frac{1}{\sqrt{5}} u_n \sqrt{5} = u_n.$$

Ce qui permet également un calcul direct de u_n .

c) Les puissances successives de l'inverse du nombre d'or.

De la relation $\phi^2 = \phi + 1$, il résulte que, en divisant par ϕ : $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$.

$$\text{On a : } \frac{1}{2} = (\phi - 1)^2 = \phi^2 - 2\phi + 1 = (\phi + 1) - 2\phi + 1 = 2 - \phi$$

$$\text{Puis : } \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\phi - 1} = (\phi - 1)(2 - \phi) = -2 - \phi^2 + 2\phi + \phi = -2 - (\phi + 1) + 2\phi + \phi = 2\phi - 3.$$

$$\text{Puis : } \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\phi - 3} = (\phi - 1)(2\phi - 3) = 2\phi^2 - 2\phi - 3\phi + 3 = 2(\phi + 1) - 5\phi + 3 = -3\phi + 5.$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\frac{1}{\phi} = \phi - 1.}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} = -\phi + 2.}$$

$$\boxed{\frac{1}{3} = 2\phi - 3.}$$

$$\boxed{\frac{1}{4} = -3\phi + 5.}$$

On voit de nouveau apparaître comme coefficients les nombres de la suite de Fibonacci u déterminée par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Démontrons par récurrence que, pour $n \geq 1$:

$$\boxed{\frac{1}{n} = (-1)^n (u_n - u_{n-1} \cdot \phi)}$$

En effet, cela est déjà vrai pour $n=1$, $n=2$, $n=3$ et $n=4$.

Démontrons que si cela est vrai pour n , alors c'est vrai pour $n+1$, c'est-à-dire démontrons que si : $\frac{1}{n} = (-1)^n (u_n - u_{n-1} \cdot \phi)$, alors $\frac{1}{n+1} = (-1)^{n+1} (u_{n+1} - \phi \cdot u_n)$.

$$\text{En effet, si : } \frac{1}{n} = (-1)^n (u_n - u_{n-1} \cdot \phi), \text{ alors } \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\phi - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \frac{1}{n+1} &= (-1)^n (u_n - u_{n-1} \cdot \phi) \cdot (\phi - 1) = (-1)^{n+1} \cdot (1 - \phi) \cdot (u_n - u_{n-1} \cdot \phi) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (u_n - \phi \cdot u_n - u_{n-1} \cdot \phi + u_{n-1} \cdot \phi^2) \quad (\dots \text{or } \phi^2 = \phi + 1) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (u_n - \phi \cdot u_n - u_{n-1} \cdot \phi + u_{n-1} \cdot \phi + u_{n-1}) \quad (\dots \text{or } u_n + u_{n-1} = u_{n+1}) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (u_{n+1} - \phi \cdot u_n) : \text{ donc cela est réalisé.} \end{aligned}$$

d) La correspondance avec les anciennes mesures.

Pour évaluer une longueur, on peut se servir de la main, du pied ou d'enjambées. Par exemple, la main donne l'**empan**, longueur entre les extrémités du pouce et du mineur, les doigts étant écartés. En partant de la **ligne** qui vaut 2,25 mm et qui serait le diamètre d'un grain d'orge, le **pouce** vaut 12 lignes, soit 2,7 cm. Puis en attribuant à l'empan la valeur 1 :

La paume	Le palme	L'empan	Le pied	La coudée
34 lignes	55 lignes	89 lignes	144 lignes	233 lignes
7,64 cm	12,36 cm	20 cm	32,36 cm	52,36 cm
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	1	ϕ	2

On voit alors apparaître des **puissances successives** du nombre d'or ϕ .

Par ailleurs la **toise** vaut 6 pieds, soit 194,16 cm et correspond donc à 6ϕ , et le pied vaut 12 pouces de 12 lignes donc le **pouce** correspond à $\frac{1}{12}$. La **ligne** vaut $\frac{1}{144}$, et est proche de $\frac{1}{9}$.

On peut remarquer que **6 coudées** de 0,5236 m correspondent à 3,1416, qui est une **valeur approchée de π** , et que 3 pieds de 0,3236 m sont proches de 1 mètre.