

7. NOMBRE D'OR ET SUITE DE FIBONACCI.

a) Définition :

Considérons une suite de nombre entiers dont les 2 premiers termes sont égaux à 1 et dont chaque terme suivant s'obtient en additionnant les 2 termes précédents.

Il s'agit de la **suite de Fibonacci**, introduite par le mathématicien italien Leonardo Fibonacci en 1202 (dans son traité « Liber abacci »).

On obtient ainsi successivement : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657.....

b) Les lapins de Fibonacci.

Voici la façon dont Leonardo Fibonacci a présenté cette suite :

« Un **couple de lapins** juvéniles, enfermé dans un enclos dans lequel il a de quoi se nourrir ainsi que sa descendance, devient fertile au bout d'un mois, puis donne naissance à un nouveau couple de lapins à la fin de chaque mois suivant. Chaque nouveau couple fait de même. Combien de couples pourra-t-on compter à la fin de l'année ? ».

Dans ce processus, on suppose que chaque nouveau couple est formé d'un male et d'une femelle, que tous les lapins sont fertiles et restent en vie, et on ne s'occupe pas de la consanguinité...

On note u_n le nombre de couples de lapins obtenus au bout de n mois.

Initialement, il y a un seul couple, et $u_0 = 1$. Au bout de 1 mois, ce couple a est devenu fertile (on le note A), mais encore sans descendance, donc : $u_1 = 1$.

Au bout de 2 mois, de ce couple A naît un nouveau couple juvénile b. La population de lapins est composée du couple initial A et de ce nouveau couple b : donc $u_2 = 2$.

Au bout de 3 mois, du couple A naît à un nouveau couple juvénile c, et le couple b devient fertile (on le note B). La population est : $u_3 = 3$.

Au bout de 4 mois, du couple A naît un nouveau couple juvénile d, du couple B naît un couple juvénile e et le couple c devient fertile (on le note C). La population est composée des couples A, B, C, d, e : donc $u_4 = 5$.

Au bout de 5 mois, chacun des couples A, B et C donne naissance à un couple juvénile (respectivement f, g, h) et les couples d et e deviennent fertiles. La population est composée des couples A, B, C, D, E, f, g, h, et on a : $u_5 = 8$.

Le processus continue et à chaque mois n , à la population du mois précédent ($n-1$) s'ajoute celle correspondant aux couples créés par ceux qui étaient devenus fertiles, au nombre de la population du mois d'avant ($n-2$), donc on aura : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, si $n \geq 2$, ou encore, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

On constate qu'au bout de 10 mois, on aura 55 couples de lapins, on en aura 6765 au bout de 20 mois, 75025 au bout de 25 mois et 832040 au bout de 30 mois....

c) Mais considérons les rapports de 2 termes successifs de cette suite :

Ce rapport est très vite toujours proche du nombre d'or $\phi \cong 1,618$.

Dans le tableau suivant, la 1^{ère} colonne du tableau qui suit correspond au rang du terme de la suite, la 2^{ème} colonne correspond à la valeur de ce terme et la 3^{ème} colonne correspond au rapport de la valeur de ce terme par la valeur du terme précédent. On peut déjà constater que ce rapport est très vite proche du nombre d'or φ .

1	1	
2	1	1
3	2	2
4	3	1,5
5	5	1,66666667
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,61538462
9	34	1,61904762
10	55	1,61764706
11	89	1,61818182
12	144	1,61797753
13	233	1,61805556
14	377	1,61802575
15	610	1,61803714

16	987	1,61803279
17	1597	1,61803445
18	2584	1,61803381
19	4181	1,61803406
20	6765	1,61803396
21	10946	1,618034
22	17711	1,61803399
23	28657	1,61803399
24	46368	1,61803399
25	75025	1,61803399
26	121393	1,61803399
27	196418	1,61803399
28	317811	1,61803399
29	514229	1,61803399
30	832040	1,61803399

Démontrons que la limite de ce rapport $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ est exactement le nombre d'or φ .

On a: $v_{n+1} - \varphi = \frac{u_{n+1}}{u_n} - \varphi = \frac{u_n + u_{n-1}}{u_n} - \varphi = 1 + \frac{1}{v_n} - \varphi$ (or $\varphi^2 = \varphi + 1$, donc: $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$)

Donc : $v_{n+1} - \varphi = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi - v_n}{\varphi \cdot v_n}$ et $|v_{n+1} - \varphi| = \frac{1}{\varphi v_n} \cdot |v_n - \varphi|. (1)$

Or : $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. En effet, la suite u_n vérifie $u_n > 0$ et elle est croissante. On le vérifie sur ses premiers termes, et, par récurrence, si $u_{n+1} \geq u_n > 0$ et si $u_n \geq u_{n-1} > 0$, alors par addition membre à membre : $u_{n+1} + u_n \geq u_n + u_{n-1} > 0$, donc $u_{n+2} \geq u_{n+1} > 0$: cela est réalisé.

Donc $v_n \geq 1$ et $0 < \frac{1}{v_n} < 1$. Donc : $|v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi} \cdot |v_n - \varphi|. (2)$

Or $v_0 - \varphi = 1 - \varphi$ et $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ donc $|v_0 - \varphi| = \frac{1}{\varphi}$. Démontrons : $|v_n - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^{n+1}} (3).$

Démontrons-le par récurrence : Cela a été vérifié pour $n=0$, puisque $|v_0 - \varphi| = \frac{1}{\varphi} \leq \frac{1}{\varphi}$.

Démontrons que si (3) est vraie pour n , alors (3) est vraie pour $(n+1)$, c'est-à-dire que si $|v_n - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^{n+1}}$, alors $|v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^{n+2}}$. En effet :

Si $|v_n - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^{n+1}}$, alors $|v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi} \cdot |v_n - \varphi|. (2)$ donc $|v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{\varphi^{n+1}}$, et

$|v_{n+1} - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^{n+2}}$: cela est réalisé. Donc (3) est démontré.

La suite $\frac{1}{\varphi^{n+1}}$ est géométrique, de raison $\frac{1}{\varphi}$, donc elle converge vers 0. Donc la limite de la suite $|v_n - \varphi|$ est également 0, et donc :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ converge vers le nombre d'or } \varphi.$$

d) Présence du nombre d'or à travers la suite de Fibonacci :

- 1° Cette propriété de convergence de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers le nombre d'or φ était parfois connue pour le nombre de sièges à disposer en longueur et en largeur dans les théâtres et les salles de spectacles, afin d'y faire régner l'harmonie.

Ces deux nombres étaient souvent deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci, de manière à former un rectangle proche d'un rectangle d'or. Par exemple : 21 et 13, 34 et 21, 55 et 34, 89 et 55, 144 et 89, etc...

- 2° On retrouve la suite de Fibonacci dans de nombreux rythmes poétiques.

Par exemple :

- Le rapport 2/1 est celui d'un alexandrin (12 pieds) suivi d'un semi-alexandrin (6 pieds)
- Le rapport 3/2 est celui d'un alexandrin (12 pieds) suivi d'un octosyllabe (8 pieds)
- Le rapport 5/3 est celui d'un vers de 10 pieds, suivi d'un vers de 6 pieds
- Le rapport 8/5 est celui d'un vers de 8 pieds suivi d'un vers de 5 pieds, comme dans le poème « Le Serpent qui danse » de Baudelaire (1821- 1867), dans « Les fleurs du mal » :

Que j'aime à voir, chère indolente, (8)
De ton corps si beau, (5)
Comme une étoffe vacillante, (8)
Miroiter la peau ! (5)

Sur ta chevelure profonde (8)
Aux âcres parfums, (5)
Mer odorante et vagabonde (8)
Aux flots bleus et bruns, (5) ...

- 3° On retrouve aussi la suite de Fibonacci dans les rythmes musicaux.

Si on considère les intervalles respectifs entre les différentes notes et la note initiale ou tonique, soit ut_1 , on trouve des intervalles mesurés par les premiers termes de la suite de Fibonacci :

- l'unisson (ut_1, ut_1) correspond à 1/1
- la quinte juste (ut_1, sol) correspond à 3/2
- l'octave (ut_1, ut_2) correspond à 2/1
- la sixte majeure (ut_1, la) correspond à 5/3

Au VIème siècle, à Rome, **Boèce**, philosophe d'inspiration pythagoricienne, élaborait un traité « De Institutione Musica », qui s'imposa comme la référence des théoriciens de la musique durant tout le Moyen Age. La musique faisait alors partie du Quadrivium, ensemble des quatre grandes disciplines de la pensée rationnelle, avec l'arithmétique, la géométrie et l'astronomie. L'harmonie de la musique était associée à l'harmonie mystérieuse des nombres, et à la compréhension du fonctionnement de l'univers. Il y avait l'idée pythagoricienne de la musique des sphères et du principe divin qui met la matière en action. Dans cet ordre de pensée, le nombre d'or occupait une place privilégiée, et cette « divine proportion » semble avoir été utilisée de façon diverse par de nombreux compositeurs pour la forme de l'écriture musicale des partitions et des orchestrations, par exemple : Dufay (XVème siècle), Roland de Lassus (XVIème siècle), Bach, notamment dans la Passion selon saint Matthieu (XVIIème siècle), puis Mozart, dans certaines symphonies, Haydn (XVIIIème siècle), Beethoven dans

ses sonates (XIX^{ème} siècle), et, plus proches, Debussy, Bartók, Webern et Stockhausen (XX^{ème} siècle)...

- 4° La « divine proportion » est depuis toujours présente dans la nature.

Le nombre de pétales d'une fleur est très souvent lui-même un nombre de la suite de Fibonacci. Par exemple, les trilliums et les lys ont 3 pétales, ainsi que les perce-neiges.



Les boutons d'or, les primevères et les roses « simples » ont 5 pétales ainsi en général que les fleurs des arbres fruitiers ; les dryades en ont 8, l'arnica en a souvent 13, les chicorées en ont en général 21 et les **marguerites** (ci -contre une de mes photos de juin 2023) ont généralement 34, 55 ou 89 pétales, de même que les pâquerettes et les tournesols) : ces derniers peuvent parfois atteindre les nombres 89 et 144.

Cependant, ce n'est pas une règle générale, et il existe aussi des fleurs dont le nombre de pétales n'est pas un élément de cette suite. Ainsi, les coquelicots ont 4 pétales, les colchiques et les narcisses ont 6 pétales, les cardamines ont 7 pétales...

Mais le nombre d'or intervient, à travers la suite de Fibonacci, de beaucoup d'autres façons, dans la **constitution, l'agencement et la croissance des plantes et du vivant.**

Lorsque les organes (feuilles sur une tige, fleurs sur une inflorescence en grappe ou fleurons sur un capitule) sont nombreux et serrés, on voit apparaître des parastiches, spirales secondaires qui s'entrecroisent, Certaines parastiches s'enroulent dans le sens anti- horaire, d'autres dans le sens horaire. **Les nombres de parastiches sont le plus souvent des termes de la suite de Fibonacci, et sont étroitement liés à l'angle d'or.**



Ainsi, lorsqu'on observe le **cœur des tournesols**, on remarque deux séries de courbes, une enroulée dans un sens et une dans l'autre ; le nombre de spirales n'étant pas le même dans chaque sens.

Ce nombre de spirales est en général soit 21 et 34, soit 34 et 55, soit 55 et 89, ou soit 89 et 144 : **deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci.**

Ci-contre une de mes photos de novembre 2022.

De même, au cœur d'une marguerite ou d'un aster, les minuscules fleurs disposées sur le capitule (les fleurons) forment deux familles de 13 et 21 spirales, voire 21 et 34 ...

Si on examine la disposition des feuilles, bourgeons et branches sur la tige d'une plante, on retrouve encore la suite de Fibonacci. On prend comme point de repère une feuille voisine de la base d'une tige qui porte des feuilles isolées, on numérote cette feuille 0 et on compte les feuilles vers le sommet jusqu'à arriver à une feuille qui se trouve juste au-dessus de celle de départ. Le nombre m de feuilles rencontrées est en général un terme de la suite de Fibonacci. De même en progressant vers le sommet, si on compte le nombre n de tours, celui-ci est en général aussi un terme de la suite de Fibonacci. On parle de « spirale m/n ».

Chez de nombreux végétaux, la croissance des feuilles, des écailles et des pétales forme des spirales.



Cette croissance obéit à un principe de construction rigoureux lié à la suite de Fibonacci.

Par exemple, pour la **pomme de pin**, on retrouve 8 spirales dans le sens des aiguilles d'une montre et 13 dans le sens opposé ; donc 2 nombres consécutifs de la suite de Fibonacci. Et on retrouve encore la suite de Fibonacci dans la disposition spiralée des feuilles d'artichaut, les ananas (8 diagonales dans un sens et 13 dans l'autre), les cactus et les écailles des carapaces de tortues,

Pour ce qui est des fleurs, il semble que disposer ses graines en deux familles de spirales dont le nombre de bras est formé de deux nombres de Fibonacci consécutifs permette d'en faire entrer un maximum dans un espace donné. Tout autre agencement comporterait apparemment des « trous ».

On nomme **fractale** la répétition de formes similaires à différentes échelles d'observation. Ainsi, une partie d'un nuage peut ressembler au nuage tout entier... Le chou-fleur, le brocoli sont des formes fractales car les parties sont à l'image du tout. Un arbre est fractal en ce sens que ses branches maitresses, issues du tronc, sont chacune des arbres en réduction. **Souvent le nombre d'or intervient dans le rapport de réduction.** Ce rapport est souvent le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci....

Le nombre d'or intervient aussi chez de nombreux **animaux**.

Par exemple, vu du dessus, un **papillon** pourrait s'inscrire dans un rectangle d'or, ou un rectangle dont la longueur et la largeur sont 2 termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Et si on prend en compte la distance entre les motifs imitant les yeux et le bord de l'aile d'un papillon, le rapport de la mesure des traits serait proche du nombre d'or.

Ci-dessous quelques-unes de mes photos de papillons de ces dernières années.



e) Les abeilles et la suite de Fibonacci.

Une ruche abrite une reine, des abeilles mâles (les faux bourdons) ainsi que des abeilles femelles ordinaires, très majoritaires. La reine peut vivre plusieurs années, ses sujets quelques semaines seulement. Il faut donc les renouveler.

C'est pour cela que la reine pond en continu une centaine d'œufs par jour. Dans sa jeunesse, la reine abeille accomplit un vol nuptial : grande lune de miel durant laquelle elle récolte, une fois pour toutes, les gamètes d'une dizaine de faux bourdons.

Elle conserve leurs semences dans une poche, sorte de banque de sperme : la spermathèque. Puis, tout au long de sa vie, une fois partie fonder ou reprendre une colonie, elle en fera usage en la comprimant ou non pour en extraire ou pas le contenu : c'est une particularité de la reproduction des abeilles et plus généralement des Hyménoptères (abeilles, bourdons, guêpes, frelons, fourmis, etc.).

- Quand elle féconde un œuf avec un spermatozoïde pris dans sa spermathèque, la reine fait naître une abeille femelle. L'abeille femelle pourra occuper différents postes dans son existence : ménagère, ouvrière, gardienne, ventileuse, butineuse, etc. Quelques-unes, biberonnées à la gelée royale plus longtemps que leurs camarades, règneront à leur tour.

- Quand elle ne féconde pas un œuf avec un spermatozoïde, la reine fait naître une abeille mâle (un faux bourdon). La boucle se boucle : ce dernier partira vers son vol nuptial. Il y rencontrera peut-être une princesse d'une colonie voisine et mourra quelques minutes après l'accouplement puisqu'il y perd une portion de son abdomen.

Bref, une abeille femelle possède un « papa » et une « maman » ; une abeille mâle (le faux bourdon) n'a qu'une « maman ».

Si on remonte l'arbre généalogique d'un faux bourdon et si on compte le nombre u_n de ses ancêtres de degré n , on a : $u_1 = 1$ (il a une maman et pas de papa).

Sa maman a une maman et un papa : $u_2 = 2$.

Au rang n , tout le monde a une « maman » ; et les femelles, qui sont au même nombre que les individus d'ordre $n - 1$, ont aussi un papa.

Donc, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Nous reconnaissons la suite de Fibonacci dans le nombre u_n des ancêtres de degré n d'un faux bourdon.

Cependant lorsqu'on examine un gâteau de cire construit par des abeilles pour y déposer leur miel, on voit qu'il est constitué par des alvéoles juxtaposées dont l'ouverture a la forme d'un **hexagone régulier**, dont on peut démontrer qu'il permet de réaliser une **économie de la cire**. Ici le nombre de côtés de ce polygone (6) n'est pas un nombre de la suite de Fibonacci.