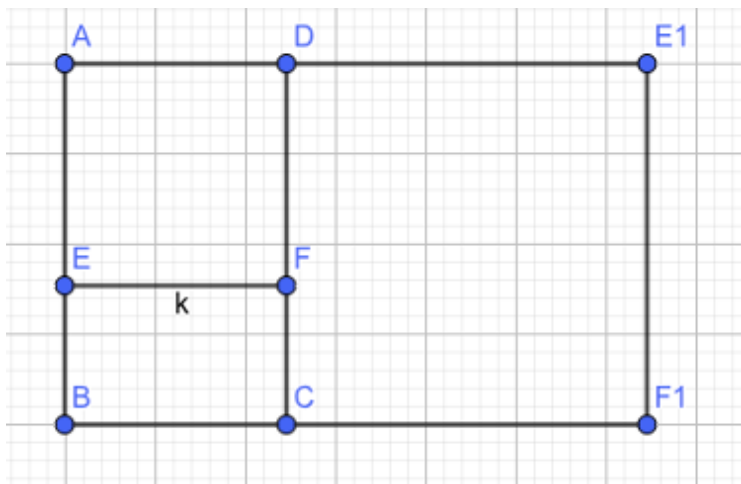


4. DES EXEMPLES DE PRESENCE DU NOMBRE D'OR DANS L'ANTIQUITE.

a) LE NOMBRE D'OR ET LES AUTELS DES GRECS ET DES EGYPTIENS.



Ce qui est remarquable, c'est qu'en enlevant, ou en adjoignant, un carré à un rectangle d'or, on obtient encore un rectangle d'or.

Ainsi, si ABCD est un rectangle d'or, en enlevant le carré intérieur ADFE, ou aussi en adjoignant le carré extérieur CDE₁F₁, on obtient de nouveaux rectangles d'or BCFE et ABF₁E₁.

En effet, soit ABCD un rectangle d'or, avec $\frac{AB}{BC} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

On avait : $\varphi^2 = \varphi + 1$. En divisant par φ , on a : $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$ donc :

$$\boxed{\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}}$$

Considérons BCFE : on a : $\frac{BC}{BE} = \frac{BC}{AB - AE} = \frac{BC}{AB - BC} = \frac{BC}{BC \cdot \varphi - BC} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi$.

Donc BCFE est un rectangle d'or.

Considérons ABF₁E₁ : on a : $\frac{AE_1}{AB} = \frac{AD + CD}{AB} = \frac{AD + AB}{AB} = \frac{AD + AD \cdot \varphi}{AD \cdot \varphi} = \frac{1 + \varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi$

Donc ABF₁E₁ est un rectangle d'or.

Cette propriété était déjà connue des Égyptiens et des Grecs dans l'Antiquité.

Ils adaptaient ainsi les dimensions de leurs autels aux circonstances. A partir d'un autel rectangulaire obéissant à la règle d'harmonie, ils obtenaient ainsi un autel plus grand respectant la même règle d'harmonie, simplement en lui adjoignant un carré.

Mais actuellement il semble difficile de trouver un autel dont les formes sont celles d'un rectangle d'or...

b) LA PYRAMIDE DE KHEOPS.

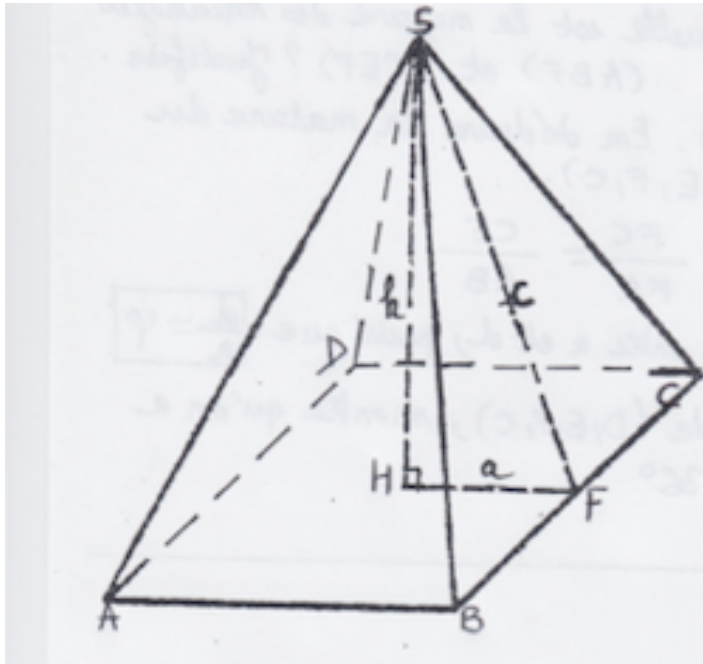
1° La proposition d'Hérodote.

Les pyramides, destinées chez les Égyptiens, à glorifier un souverain ou un royaume, manifestaient sur la Terre la puissance et la splendeur du dieu créateur de l'univers. On les considérait comme une porte vers l'univers céleste, reliant le royaume d'Égypte à la demeure des dieux. Ainsi le pharaon Khufu, appelé aussi Kheops, a fait construire la Grande Pyramide de Gizeh, il y a près de 4650 ans.

La pyramide de Kheops a une base carrée de côté mesurant 230,36 mètres, soit 440 coudées royales, et une hauteur initiale de 146,58 m, soit 280 coudées royales (aujourd'hui environ 137 m). Une coudée royale représente 0,5236 m.

Si ABCD est le carré de sa base, si H est le centre de ce carré, et si S est son sommet, (SH) est perpendiculaire au plan de la base (ABCD). Cela implique que les triangles SAB, SBC, SCD et SDA sont égaux et ont la même aire.

L'historien grec Hérodote avait affirmé avoir appris des prêtres égyptiens que les proportions de la pyramide de Khéops étaient telles que le carré construit sur la hauteur comme côté avait une aire égale à celle de chacune des faces triangulaires.



Posons $h = SH$

Si F est le milieu de [BC] posons $a = HF$, donc $AB = BC = CD = DA = 2a$.

Posons $c = SF$.

Le triangle SBC est isocèle de base BC et de hauteur SF, donc son aire est : $\frac{BC \times SF}{2}$

$$\boxed{\text{Aire (SBC)} = a \cdot c}$$

L'aire du carré construit sur la hauteur de la pyramide étant h^2 , la proposition d'Hérodote s'écrit :

$$\boxed{h^2 = a \cdot c}$$

Le triangle SHF est rectangle en H donc d'après Pythagore : $c^2 = h^2 + a^2$

$$\boxed{h^2 = c^2 - a^2}$$

On a donc : $c^2 - a^2 = a \cdot c$, ou encore en divisant par a^2 : $\frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{c}{a}$, donc en posant $x = \frac{c}{a}$:

$x^2 - 1 = x$, ou encore :

$$\boxed{x^2 = 1 + x \text{ (avec } x \text{ positif) donc } x \text{ est le nombre d'or}}$$

Dire que la proposition d'Hérodote est vérifiée, cela signifie que l'apothème SF (distance du sommet au centre d'une face) vérifie : $\frac{c}{a} = \phi$ (nombre d'or) ou encore que : $c = a \cdot \phi$

$$\boxed{\frac{c}{a} = \phi \text{ est le nombre d'or}}$$

Or l'apothème c de la pyramide mesure 186,4m soit 356 coudées. Avec $AB = 2a = 230,36$ m, on peut vérifier qu'on trouve bien une valeur de $\frac{c}{a}$ très proche de la valeur du nombre d'or ϕ affichée par la calculatrice.

A l'époque, le nombre d'or n'avait pas été nommé, mais « intuitivement utilisé » ...

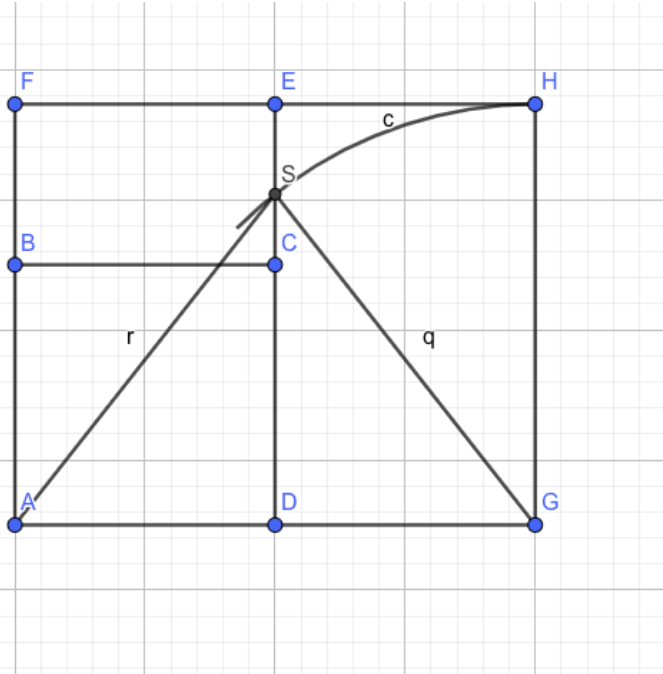
2° Construction de la hauteur de la pyramide de Khéops :

On dit que la pyramide de Khéops est bâtie « sur le module ϕ », celui du nombre d'or.

Sa hauteur vérifie $h^2 = a c$ où $\frac{c}{a} = \varphi$, donc $h^2 = a^2 \cdot \varphi$. Par conséquent :

On a : $h = a \sqrt{\varphi}$

Nous allons voir que sa hauteur peut facilement être construite à la règle et au compas, à partir de deux rectangles d'or (dont nous avons vu précédemment comment les construire, voir en page 3).



Soit un carré ABCD de côté a , et le rectangle d'or AEFD construit à partir de ce carré. On a : $AF = a \cdot \varphi$

On construit ensuite un rectangle d'or DGHE de même taille.

Le cercle c de centre G passant par H coupe $[DE]$ en un point S .

On a : $GH = GS = a \cdot \varphi$

La droite (DE) est un axe de $AGHF$, le triangle AGS est isocèle, et le triangle DGS est rectangle en D . D'après le théorème de Pythagore :
 $DS^2 = GS^2 - GD^2 = a^2 \cdot (\varphi^2 - 1)$

Or le nombre d'or φ vérifie : $\varphi^2 = 1 + \varphi$, donc $DS^2 = a^2 \cdot \varphi$, et donc :

$DS = a \sqrt{\varphi}$