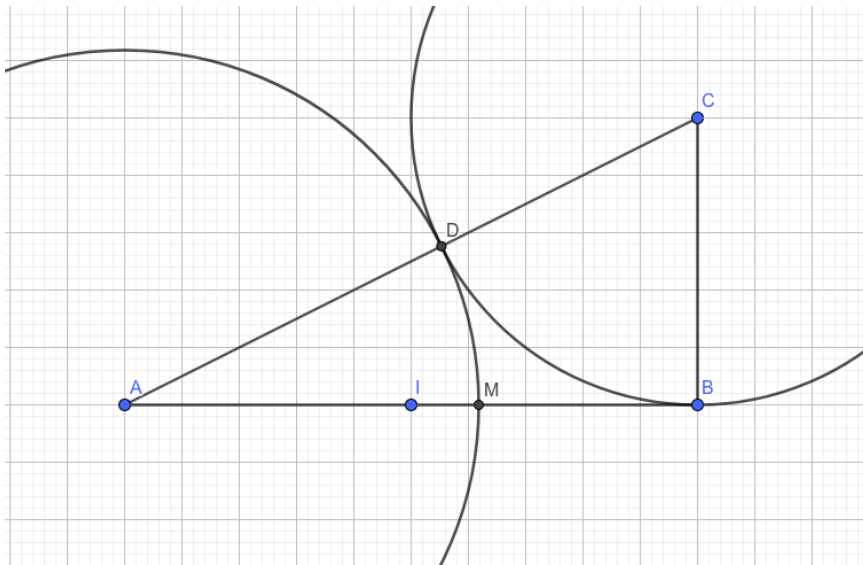


3. QUELQUES GENERALITES SUR LE NOMBRE D'OR.

a) Un procédé de construction pour partager un segment « suivant la divine proportion »



1° Soit un segment $[AB]$ et soit I le milieu de $[AB]$.

Tracer la perpendiculaire en B à $[AB]$ et y placer un point C tel que $BC = BI$ (par exemple en traçant un arc de cercle de centre B passant par I).

Tracer le cercle de centre C passant par B : il coupe $[AC]$ en un point D.

Tracer le cercle de centre A passant par D : il coupe $[AB]$ en un point M.

Alors : $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB} = \varphi$ (nombre d'or). Et M partage $[AB]$ suivant la divine proportion.

On dit aussi que « M divise le segment $[AB]$ en moyenne et extrême raison ».

En effet : si $AB=a$, alors $BC=BI=CD=\frac{a}{2}$, donc d'après Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = \frac{5a^2}{4}$

Et on a $AC = a \frac{\sqrt{5}}{2}$. Donc $AM = AD = AC - CD = a \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$, et $BM = AB - AM = a \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Donc $\frac{AM}{MB} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \times \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

Et $\frac{AB}{AM} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

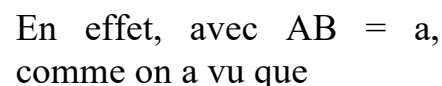
b) Un procédé de construction d'un segment de longueur égale au nombre d'or.

Étant donné un segment $[AB]$, de longueur unité, il s'agit de placer un point N de sorte que $AN=\varphi$ (nombre d'or).

On peut reprendre et compléter la construction précédente : soit I le milieu de $[AB]$. Soit C sur la perpendiculaire à $[AB]$ en B, tel que $BC = BI$.

On trace le cercle c de centre C passant par B : il coupe (AC) en deux points D et E, D étant sur le segment $[AC]$ et E à l'extérieur de ce segment.

Les cercles de centre A passant par D et E coupent respectivement la demi droite $[A, B)$ en M et N : M correspond au point précédent qui divisait $[AB]$ suivant la divine proportion, et N est un point tel que B divise $[AN]$ suivant la divine proportion.



On a: $AN = AE$

$$= \text{AD} + \text{DE}$$

$$= \text{AD} + 2 \text{ BC}$$

$$= \text{AD} + \text{AB}$$

$$= a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) + a$$

$$= a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Donc $\frac{AN}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

D'autre part :

$$BN = AN - AB$$

$$= a\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= AD = AM$$

En particulier, si $AB = 1$, on a : $AN = \varphi$

On commence d'abord par construire un carré ABCD. Placer le point I milieu de $[CD]$.

Tracer l'arc de cercle de centre I passant par B : il coupe la demi droite $[DC)$ en un point E.

La droite perpendiculaire à (CD) en F coupe (AB) en E. Alors AEFD est un rectangle d'or.

En effet, soit $AB = a$. D'après le théorème de Pythagore dans BCI :

$$BI^2 = BC^2 + IC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \text{ et : } BI = a \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ donc on a aussi } IF = BI = a \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ et donc}$$

$$DF = DI + IF = \frac{a}{2} + a \frac{\sqrt{5}}{2} = a \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = a \varphi, \text{ où } \varphi \text{ est le nombre d'or, donc } \frac{DF}{AD} = \varphi$$

AEFD est alors un rectangle d'or.

On sait que

, que φ vérifie :

, donc :

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

On en déduit :

$$\varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$$

. On peut aussi vérifier que l'on a :

$$\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}$$

On a :

$$\varphi \cong 1,6180339887 \ 4989484820 \ 4586834365 \ 6381177203 \ 0917980576...$$

Parmi les approximations possibles de φ , en voici une utilisant le nombre π :

$$\varphi \cong \frac{16}{\pi^2}$$

Voir plus loin les nombreuses approximations obtenues en utilisant 2 termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Voici quelques expressions originales obtenues avec φ :

La relation $\varphi^2 = \varphi + 1$ peut s'écrire : $\varphi = \sqrt{\varphi + 1}$, puis $\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}$, puis encore :

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}} \text{ et : } \varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \varphi}}}} \text{, etc...}$$

Le nombre d'or peut s'exprimer à l'aide d'une infinité de radicaux emboîtés...

$$\text{On a aussi : } \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}}}} \text{, etc...}$$

On parle alors de **fractions continues du nombre d'or**. ...

Voir les puissances de φ et de son inverse après le paragraphe sur les suites de Fibonacci.

e) Le nombre d'or est irrationnel.

Autrement dit, il ne peut pas s'écrire sous la forme : $\varphi = \frac{p}{q}$ du quotient de 2 entiers n'ayant aucun diviseur commun. En effet, si c'était le cas, comme $\varphi^2 = \varphi + 1$, on aurait : $\frac{p^2}{q^2} = \frac{p}{q} + 1$.

Donc en multipliant par q^2 : $p^2 - p \cdot q - q^2 = 0$. En divisant par p , on aurait : $p - q = \frac{q^2}{p}$.

Or $p - q$ est un entier donc $\frac{q^2}{p}$ aussi. Donc p serait un diviseur de q . C'est contraire au fait que p et q n'ont aucun diviseur commun (ils sont premiers entre eux). Par l'absurde, on a montré :

$$\varphi \text{ est un nombre irrationnel.}$$