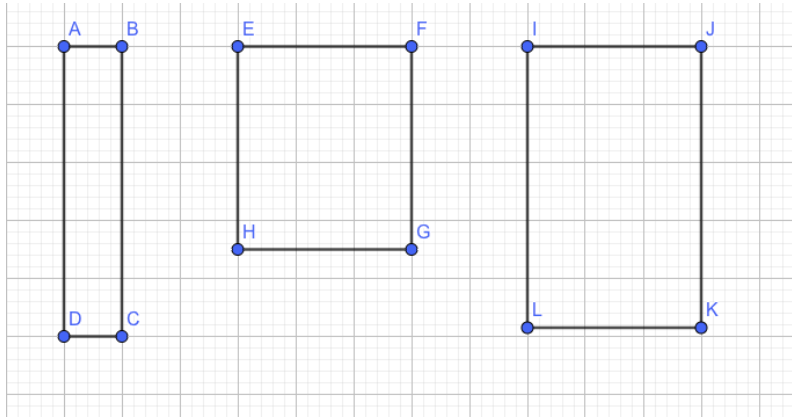


2. LA « REGLE D'HARMONIE » ET LA DEFINITION DU NOMBRE D'OR.

a) La règle d'harmonie pour un rectangle.

Posons-nous la question : quel rapport doit-il exister entre les dimensions AB et BC d'un rectangle pour sensibiliser instinctivement notre sens esthétique ?



Le plus « harmonieux » des trois rectangles ci-contre paraît être le rectangle IJKL.

La « règle d'harmonie » veut que « la grande dimension soit à la petite comme la somme des deux est à la grande » c'est-à-dire :

$$\frac{IL}{IJ} = \frac{IL + IJ}{IL}$$

En posant $a = IL$ (longueur) et $b = IJ$ (largeur), on a : $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ donc : $a^2 = ab + b^2$

En divisant par b^2 et en posant $x = \frac{a}{b}$, on obtient l'équation :

$$x^2 = x + 1.$$

La seule solution positive de cette équation du second degré est :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618\,033\,989\dots$$

Ce nombre est appelé le « nombre d'or », ou encore la « divine proportion ».

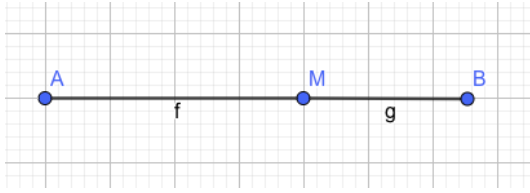
Ainsi, la « règle d'harmonie » est réalisée dans un rectangle pour le rapport $\frac{\text{Longueur}}{\text{Largeur}} = \frac{a}{b}$ égal à $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or). On dit alors qu'il s'agit d'un « **rectangle d'or** ».

b) La règle d'harmonie sur un segment :

De même si on considère cette fois un segment $[AB]$: on dit qu'un point M de $[AB]$ partage $[AB]$ suivant la **divine proportion** lorsque : $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{BM}$ (1)

C'est ainsi qu'**Euclide** avait déjà défini la « divine proportion » au 3^{ème} siècle avant J.C, mais sans lui donner de nom :

« Le rapport de la grande partie à la petite est égal au rapport du tout à la grande partie. »



On pose: $f = AM$, $g = BM$, et $\varphi = \frac{f}{g}$.

On a: $AB = f + g$.

(1) s'écrit : $\frac{f+g}{f} = \frac{f}{g}$, ou encore : $f^2 = f g + g^2$.

En divisant par g^2 , on a : $\frac{f^2}{g^2} = \frac{f}{g} + 1$ donc on arrive de nouveau à : $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Comme avant, la seule solution positive de cette équation est le nombre d'or :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618\ 033\ 989\dots$$