

13. DES SUITES DE FIBONACCI AVEC DES PREMIERS TERMES DIFFERENTS.

a) Définition :

On donne aussi le nom de suite de Fibonacci à une suite définie par la même relation de récurrence : $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, et par la donnée des deux premiers termes $v_0 = a$ et $v_1 = b$. Ici on n'a plus forcément : $a = b = 1$.

b) Indice de phyllotaxie.

En botanique, la **phyllotaxie** est la science qui décrit la disposition des feuilles les unes par rapport aux autres, sur la tige d'un végétal.

Sur un même spécimen on repère 2 feuilles occupant avec la meilleure approximation possible la même position sur la tige. Vues de l'axe de cette dernière, supposée non vrillée, les feuilles sont approximativement superposées. On compte alors le nombre A de spires qui séparent la 1^{ère} feuille de la seconde, puis le nombre B d'entrenœuds entre la 1^{ère} et la seconde.

On introduit l'**indice de phyllotaxie** $N = \frac{A}{B}$.

Les indices de phyllotaxie sont le plus fréquemment $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \dots$. Soit des rapports de termes de la suite de Fibonacci u telle que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$.

Cependant les professeurs J.E. LOISEAU et V. JEAN indiquent que l'on peut rencontrer des indices associés à d'autres suites, définies comme la suite de Fibonacci, mais **avec des premiers termes différents**, c'est-à-dire telles que $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ et $v_0 = a$ et $v_1 = b$, où a et b ne valent pas forcément 1 tous les deux. Ces suites sont également **liées au nombre d'or**, comme nous allons le voir.

c) Calcul des termes successifs et de la somme des termes d'une telle suite.

Soit une suite de Fibonacci v telle que $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ et $v_0 = a$ et $v_1 = b$, et soit la suite de Fibonacci étudiée jusqu'ici telle que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$.

On pose également : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$. On a : $S_0 = v_0 = a$, et $S_1 = v_0 + v_1 = a + b$.

$v_2 = v_0 + v_1 = a + b$	$S_2 = S_1 + v_2 = a + b + a + b = 2a + 2b$
$v_3 = v_1 + v_2 = b + a + b = a + 2b$	$S_3 = S_2 + v_3 = 2a + 2b + a + 2b = 3a + 4b$
$v_4 = v_2 + v_3 = 2a + 3b$	$S_4 = S_3 + v_4 = 5a + 7b$
$v_5 = v_3 + v_4 = 3a + 5b$	$S_5 = S_4 + v_5 = 8a + 12b$
$v_6 = v_4 + v_5 = 5a + 8b$	$S_6 = S_5 + v_6 = 13a + 20b$
$v_7 = v_5 + v_6 = 8a + 13b$	$S_7 = S_6 + v_7 = 21a + 33b$
$v_8 = v_6 + v_7 = 13a + 21b$	$S_8 = S_7 + v_8 = 34a + 54b$
$v_9 = v_7 + v_8 = 21a + 34b$	$S_9 = S_8 + v_9 = 55a + 88b$
$v_{10} = v_8 + v_9 = 34a + 55b$	$S_{10} = S_9 + v_{10} = 89a + 143b$

A gauche chaque à nouvelle ligne on additionne les résultats des 2 lignes précédentes. Et à droite, à chaque ligne, on additionne le résultat juste au-dessus à celui placé à gauche.

On constate que la suite de Fibonacci u intervient dans les deux suites v_n et S_n .

En observant tous ces résultats, il semblerait que : $v_n = u_{n-2} \cdot a + u_{n-1} \cdot b$ (1)

Et que : $S_n = u_n \cdot a + (u_{n+1} - 1) \cdot b$. (2)

Démontrons (1) par récurrence, pour $n \geq 2$.

En effet, (1) est déjà vérifiée pour les valeurs de 2 à 10.

Supposons qu'elle est vraie pour n et $n+1$ et démontrons qu'alors elle est vraie pour $n+2$.

C'est-à-dire démontrons que si $v_n = u_{n-2} \cdot a + u_{n-1} \cdot b$ et si $v_{n+1} = u_{n-1} \cdot a + u_n \cdot b$, alors on a :

$$v_{n+2} = u_n \cdot a + u_{n+1} \cdot b.$$

En effet : si $v_n = u_{n-2} \cdot a + u_{n-1} \cdot b$ et si $v_{n+1} = u_{n-1} \cdot a + u_n \cdot b$, alors $v_{n+2} = v_n + v_{n+1}$

Donc : $v_{n+2} = (u_{n-2} + u_{n-1}) \cdot a + (u_{n-1} + u_n) \cdot b = u_n \cdot a + u_{n+1} \cdot b$, car on sait que la suite u vérifie : $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ et que : $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$. Donc cela est réalisé.

$$v_n = u_{n-2} \cdot a + u_{n-1} \cdot b \quad (1)$$

Démontrons (2) par récurrence.

On sait que (2) est déjà vérifiée jusqu'à $n=10$. Supposons (2) est vraie pour n et démontrons qu'alors elle est vraie pour $n+1$, c'est-à-dire supposons que $S_n = u_n \cdot a + (u_{n+1} - 1) \cdot b$, et démontrons qu'alors $S_{n+1} = u_{n+1} \cdot a + (u_{n+2} - 1) \cdot b$.

En effet, si $S_n = u_n \cdot a + (u_{n+1} - 1) \cdot b$, alors $S_{n+1} = S_n + v_{n+1}$ où $v_{n+1} = u_{n-1} \cdot a + u_n \cdot b$, d'après (1). Donc : $S_{n+1} = u_n \cdot a + (u_{n+1} - 1) \cdot b + u_{n-1} \cdot a + u_n \cdot b$

Donc : $S_{n+1} = a \cdot (u_n + u_{n-1}) + b \cdot (u_n + u_{n+1} - 1) = u_{n+1} \cdot a + (u_{n+2} - 1) \cdot b$. c'est réalisé.

$$S_n = u_n \cdot a + (u_{n+1} - 1) \cdot b. \quad (2)$$

d) Une autre expression de v_n et S_n .

- Supposons qu'il existe 2 nombres A et B tels que l'on ait simultanément pour une certaine valeur de n : $v_n = A \varphi^n + B \bar{\varphi}^n$ et $v_{n+1} = A \varphi^{n+1} + B \bar{\varphi}^{n+1}$. Démontrons qu'alors on aura aussi $v_{n+2} = A \varphi^{n+2} + B \bar{\varphi}^{n+2}$.

En effet, dans ce cas, $v_{n+2} = v_n + v_{n+1} = A (\varphi^n + \varphi^{n+1}) + B (\bar{\varphi}^n + \bar{\varphi}^{n+1})$

$$= A \varphi^n (1 + \varphi) + B \bar{\varphi}^n (1 + \bar{\varphi}). \quad (\text{Or : } 1 + \varphi = \varphi^2, \text{ et de même : } 1 + \bar{\varphi} = \bar{\varphi}^2)$$

$$= A \varphi^n \cdot \varphi^2 + B \bar{\varphi}^n \cdot \bar{\varphi}^2 = A \varphi^{n+2} + B \bar{\varphi}^{n+2} : \text{ donc cela est réalisé.}$$

- Pour $n=0$: $v_0 = a = A + B$. Pour $n=1$: $v_1 = b = A \varphi + B \bar{\varphi}$. En résolvant ce système, on trouve une solution (A, B) unique : $A = \frac{1}{\sqrt{5}} (b - a \bar{\varphi})$ et $B = \frac{1}{\sqrt{5}} (a \varphi - b)$.

Ce qui permet de démontrer par récurrence qu'on a $v_n = A \varphi^n + B \bar{\varphi}^n$ avec ces valeurs de A et B . Donc : $v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (b - a \bar{\varphi}) \varphi^n + \frac{1}{\sqrt{5}} (a \varphi - b) \bar{\varphi}^n$.

Pour tout entier n , on a :

$$v_n = A \varphi^n + B \bar{\varphi}^n, \text{ avec } A = \frac{1}{\sqrt{5}} (b - a \bar{\varphi}) \text{ et } B = \frac{1}{\sqrt{5}} (a \varphi - b).$$

On en déduit avec la formule de la somme d'une suite géométrique $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$:

$$S_n = A \frac{1 - \varphi^{n+1}}{1 - \varphi} + B \frac{1 - \bar{\varphi}^{n+1}}{1 - \bar{\varphi}}. \quad \text{Or } \varphi^2 = \varphi + 1, \text{ donc } \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \text{ donc } \frac{1}{\varphi - 1} = \varphi \text{ et } \frac{1}{\bar{\varphi} - 1} = \bar{\varphi}$$

$$S_n = A \varphi (\varphi^{n+1} - 1) + B \bar{\varphi} (\bar{\varphi}^{n+1} - 1), \text{ avec } A = \frac{1}{\sqrt{5}} (b - a \bar{\varphi}) \text{ et } B = \frac{1}{\sqrt{5}} (a \varphi - b)$$

e) Un Tour de Passe-Passe.

Demandez à quelqu'un de choisir 2 nombres a et b et ensuite de remplir la grille suivante, éventuellement en s'aidant d'une calculatrice. Dans les colonnes qui suivent a et b , chaque nombre marqué doit être la somme des deux précédents. Dans la dernière colonne figure la somme de tous les éléments des colonnes précédentes, données comprises.

Données		Étapes intermédiaires de calcul								Somme
a	B	1	2	3	4	5	6	7	8	

Puis demandez-lui de vous annoncer juste le nombre figurant dans la colonne n°5 des étapes de calcul, et rapidement vous lui annoncerez le résultat de la somme sans autre élément pour la calculer. Comment procéderez-vous ?

La colonne n°5 correspond au 7^{ème} terme v_6 du tableau de la page 32 : $v_6 = 5a + 8b$.

La somme à obtenir correspond à $S_9 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_9 = 55a + 88b$.

Tiens, tiens ! $S_9 = 11(5a + 8b) = 11v_6$ et la multiplication par 11 est très rapide et en principe apprise à l'école primaire. Vous n'aurez aucun mal à annoncer rapidement la réponse.

Pour trouver la somme, il suffit de multiplier par 11 le nombre annoncé.
--

Exemples :

Si $a=2$ et $b=5$, on vous annonce $v_6 = 50$, et la somme sera $S_9 = 550$.

Si $a=3$ et $b=7$, on vous annonce $v_6 = 71$, et la somme sera $S_9 = 781$.

Si $a=9$ et $b=15$, on vous annonce $v_6 = 165$, et la somme sera : $S_9 = 1815$.

Si $a=12$ et $b=19$, on vous annonce $v_6 = 212$, et la somme sera : $S_9 = 2332$.