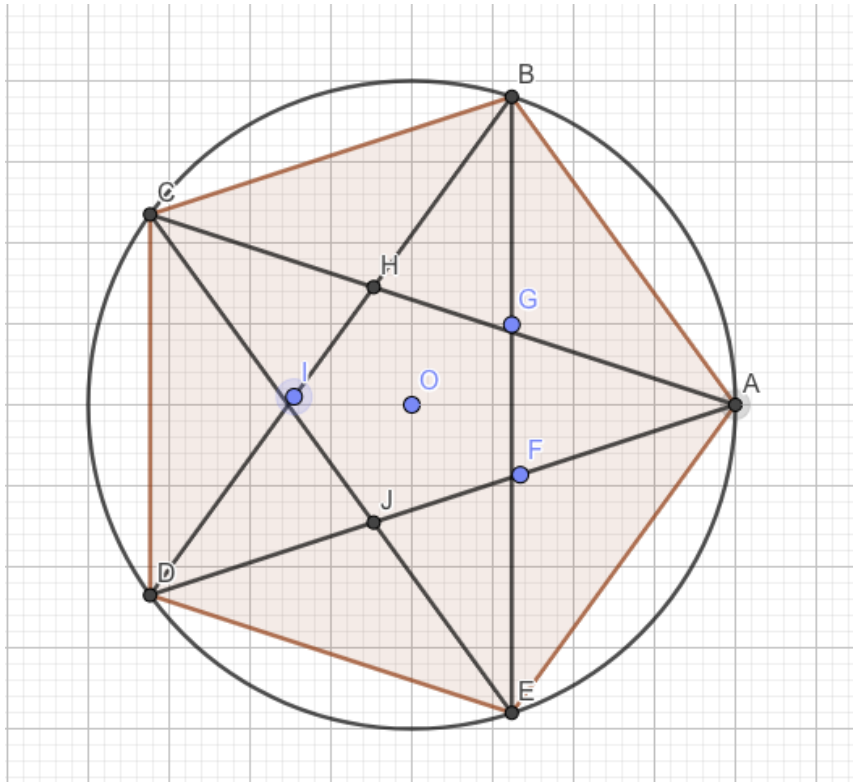


11. PENTAGRAMMES.

a) Définition et construction.

Un **pentagramme** est une étoile à 5 branches construite à partir d'un **pentagone régulier**.

Pour construire un pentagramme, il suffit donc de tracer un pentagone régulier et ses 5 diagonales.



Soit ABCDE un pentagone régulier.

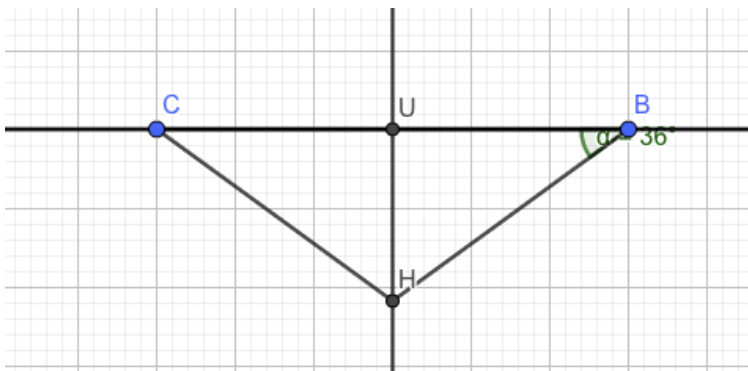
On observera que le polygone FGHIJ reliant les points d'intersection des diagonales est aussi un pentagone régulier.

En effet : $\widehat{HGF} = \widehat{SGE} = \widehat{BGA}$. Dans le triangle ABG, on a : $\widehat{ABG} = \widehat{GAB} = 36^\circ$ (d'après les propriétés étudiées, page 9) donc $\widehat{BGA} = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ$. Donc : $\widehat{HGF} = 108^\circ$.

On démontre de même que : $\widehat{GFJ} = \widehat{FJI} = \widehat{JIH} = \widehat{IHG} = 108^\circ$. **Donc le pentagone FGHIJ, ayant tous ses angles égaux, est régulier.**

On peut se poser la question de la **longueur du côté** de ce nouveau pentagone régulier FGHIJ. On a : $IH = BD - BH - ID$. On sait que si $AB = a$, la diagonale mesure $BD = a \cdot \varphi$.

Considérons le triangle BGH dont on sait déjà qu'il est isocèle (voir page 10). Soit U le milieu de $[BC]$: le triangle BUH est rectangle en U et $\widehat{HBC} = 36^\circ$, donc $\cos \widehat{HBC} = \frac{BU}{BH}$, avec $BU = \frac{a}{2}$



$$\text{Donc } BH = \frac{a}{2 \cos 36^\circ} = \frac{a}{\varphi}$$

$$\text{De même } ID = \frac{a}{\varphi} \text{ donc } IH = a \cdot \varphi - 2 \cdot \frac{a}{\varphi}$$

$$\text{Comme } \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1, IH = a (\varphi - 2\varphi + 2)$$

Donc $IH = a (2 - \varphi)$, et d'autre part un calcul facile permet de vérifier que :

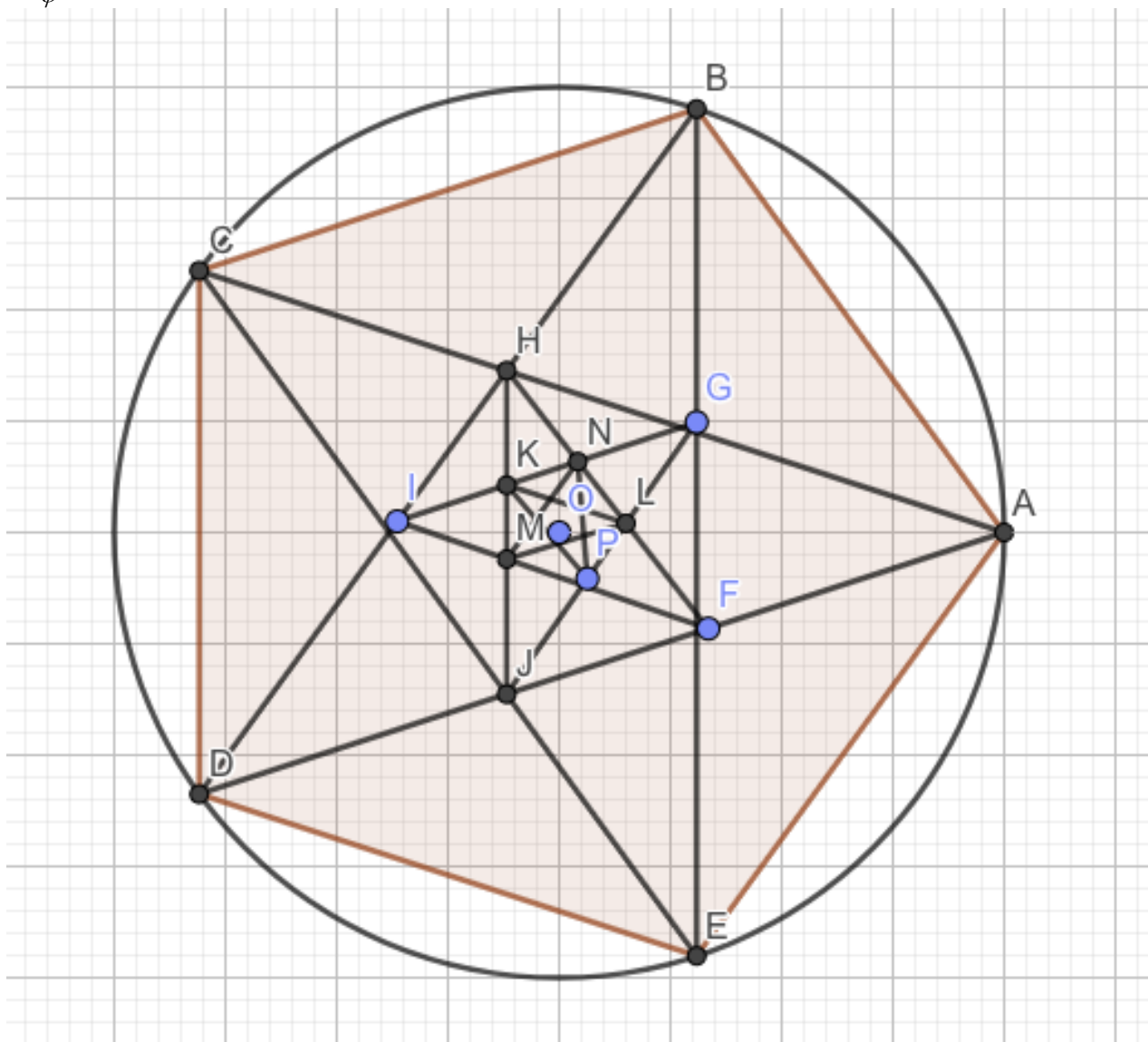
$$2 - \varphi = \frac{1}{\varphi^2}, \text{ donc on a aussi : } IH = \frac{a}{\varphi^2}$$

Le côté du pentagone régulier FGHIJ mesure $IH = a (2 - \varphi) = \frac{a}{\varphi^2}$

b) Pentagrammes emboîtés.

On peut poursuivre le processus en traçant les 5 diagonales de FGHIJ, et on fait apparaître un nouveau pentagone régulier délimité par les intersections des diagonales...

Les dimensions des côtés de ces pentagones réguliers sont en progression géométrique de raison $\frac{1}{\phi^2}$. On obtient également ainsi des « **pentagrammes emboîtés** »



c) Présence du pentagramme.

L'étoile à 5 branches est présente au cœur de nombreux fruits : pomme, poire, coing...

En effectuant une *coupe transversale* (et non longitudinale comme habituellement), ***les pépins de ces fruits forment une étoile à 5 branches.*** Ce serait aussi parce que les pépins forment une étoile à 5 branches que les initiés auraient fait de la pomme le fruit de la connaissance.

Le pentagramme (symbole comportant le nombre d'or et ayant une valeur symbolique pour les initiés Grecs) aurait été le signe de ralliement des pythagoriciens (Voir la partie « Quelques éléments d'histoire », pages 7 et 8).

Le pentagramme s'est vu attribuer parfois des vertus magiques. Jusqu'à l'époque médiévale c'était un symbole chrétien et ses cinq pointes représentaient les 5 plaies du Christ, et il était le symbole du Christ Sauveur. Le contraste est frappant avec les croyances modernes où le pentagramme est parfois critiqué pour être un symbole du mal.

Au Moyen- Age, on utilisait les vertus magiques du pentagramme en peignant des étoiles à 5 branches sur les murs des maisons ou bien on le portait sur soi, pour se protéger des accidents, des catastrophes et des mauvais sorts jetés par les **sorcières**.