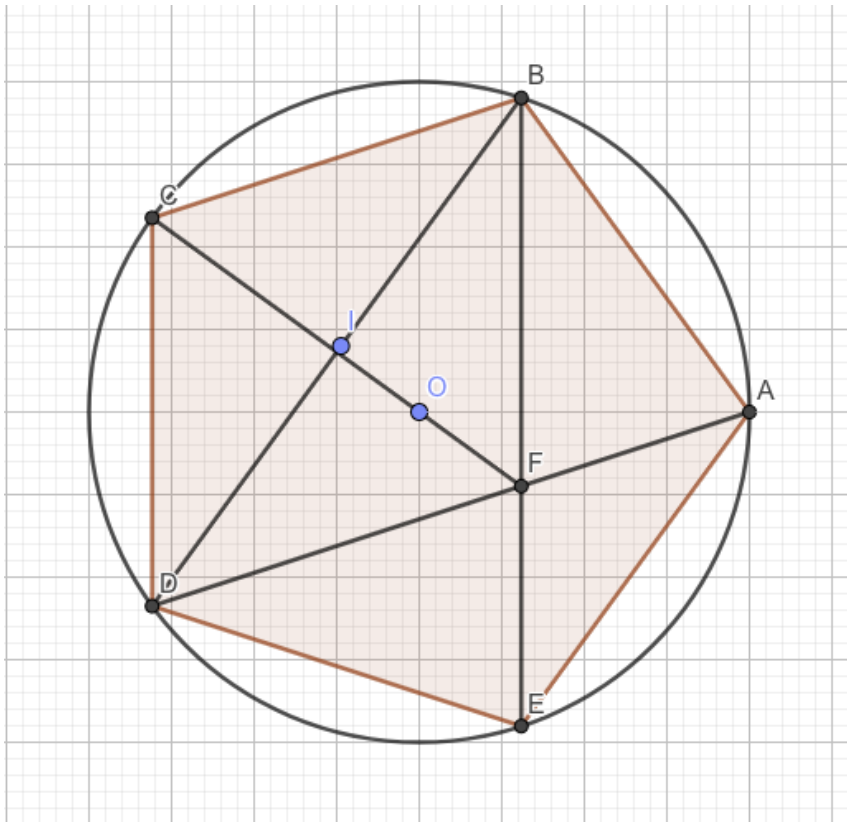


10. LE PENTAGONE REGULIER ET LE NOMBRE D'OR.

a) Relation entre les diagonales et les côtés d'un pentagone régulier.



Soit ABCDE un pentagone régulier, de côté a , inscrit dans un cercle de centre O .

Alors chacun des angles $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOE}, \widehat{EOA}$ a pour mesure : $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

L'angle inscrit mesure la moitié d'un angle au centre donc

$$\widehat{DBC} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{DOC} = 36^\circ$$

$$\widehat{EBD} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{EOD} = 36^\circ$$

$$\widehat{ABE} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOE} = 36^\circ$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABE} + \widehat{EBD} + \widehat{DBC}$$

$$\text{Ainsi : } \widehat{ABC} = 108^\circ$$

De même $\widehat{BCD}, \widehat{CDE}, \widehat{DEA}$ et $\widehat{EAB}$ mesurent chacun 108°

Par ailleurs $\widehat{BAE} = \widehat{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BOE} = 36^\circ$ et $\widehat{BDA} = \widehat{BEA} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BOA} = 36^\circ$

Donc les triangles BFD et AFE sont isocèles et donc :

$$FA = FE, \text{ et } FB = FD$$

Donc $\frac{FD}{FA} = \frac{FB}{FE}$, et d'après le théorème de Thalès :

(BD) et (AE) sont parallèles.

De la même façon : (BC) est parallèle à (AD).
(BCDF) est un parallélogramme ayant 2 côtés consécutifs égaux.

(BCDF) est un losange. Ainsi :
 $FB = FD = DC = BC$ et de plus
les droites (FC) et (BD) sont
perpendiculaires.

Par ailleurs $OB = OD, IB = ID, CB = CD$ et $FB = FD$ donc
(Avec I milieu de $[BD]$)

O, I, C, F sont alignés sur
la médiatrice de $[BD]$

Nous avons vu que les diagonales d'un pentagone étaient parallèles aux côtés.

Étudions maintenant le rapport de leur longueur par rapport à celle des côtés.

Dans le losange BCDF, posons $FB = FD = DC = CB = a$, et : $BD = d$.

D'après le théorème de Thalès dans les triangles FAE et FDB, $\frac{BD}{AE} = \frac{FB}{FE} = \frac{FD}{FA}$

Or $FE = BE - BF = d - a$. Donc: $\frac{d}{a} = \frac{a}{d-a}$. Donc : $a^2 = d(d - a)$, et $a^2 = d^2 - ad$. (1)

Posons $x = \frac{d}{a}$. En divisant (1) par a^2 , on a : $1 = \frac{d^2}{a^2} - \frac{d}{a}$, donc :

$$x^2 = 1 + x$$

Or nous savons que la seule solution positive de cette équation est le nombre d'or : $x = \varphi$

Les diagonales d'un pentagone régulier sont parallèles aux côtés et le rapport

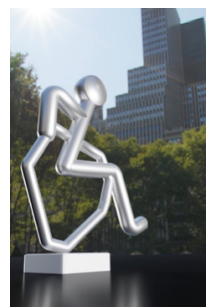
$\frac{\text{Longueur d'une diagonale}}{\text{Longueur d'un côté}}$ est égal au nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618\,033\,989\dots$

b) Présence d'un pentagone régulier.

- **Dans la nature**, nous avons vu que le nombre de pétales d'une fleur est souvent un nombre de la suite de Fibonacci. En particulier, il existe un grand nombre de **fleurs comportant 5 pétales régulièrement répartis**. Par exemple : boutons d'or, rhododendrons, silène... Les extrémités de ces pétales sont placées aux **extrémités d'un pentagone régulier**. La relation avec le nombre d'or paraît alors évidente...



- A Arlington (Virginie), aux États-Unis d'Amérique, le « Pentagone » a été construit sur décision du président Roosevelt entre 1941 et 1943. C'est un bâtiment à 5 façades et 5 étages de 604 000 m^2 , qui abrite actuellement le Ministère de la Défense, comprenant l'armée de terre, la marine et l'US Air Force (à gauche).



- Le Pentagone est aussi la 4^{ème} sculpture Chais 'Art dans le parc des Fontaines à Bruxelles (ci-dessus à droite). Son but est de sensibiliser à l'inclusion des personnes en situation de handicap.

c) Une autre expression du nombre d'or :

On a vu que (BCDF) était un losange, donc BIC est un triangle rectangle en I, dans lequel on peut écrire : $\cos \widehat{DBC} = \frac{BI}{BC}$ avec $BI = \frac{d}{2}$ et $BC = a$, Donc : $\cos \widehat{DBC} = \frac{d}{2a} = \frac{\varphi}{2}$.

Or $\widehat{DBC} = 36^\circ$. D'où une **autre expression du nombre d'or** :

$$\varphi = \frac{d}{a} = 2 \cos 36^\circ$$

Comme : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on peut aussi en déduire que :

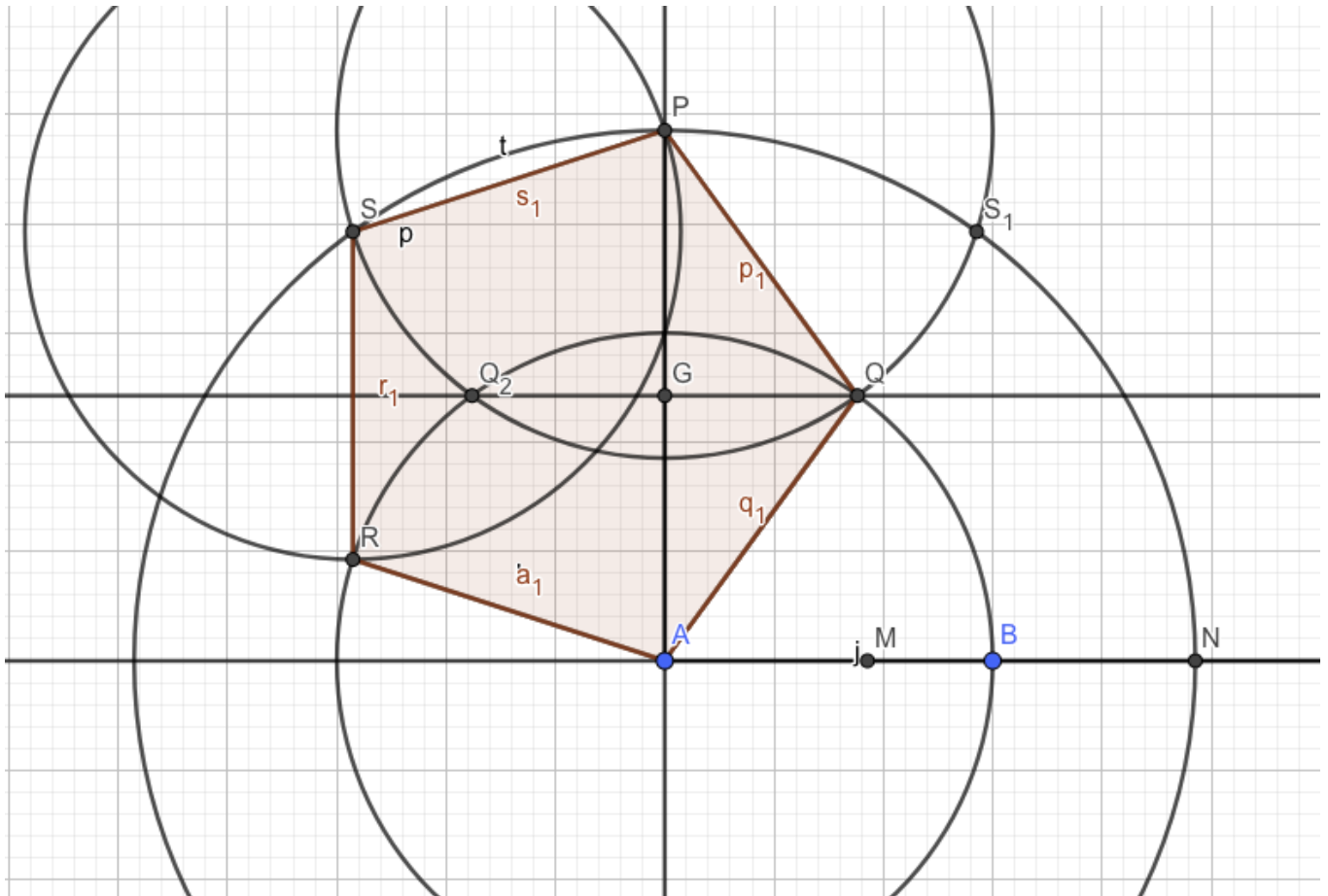
$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

d) Construction d'un pentagone régulier dont la mesure a d'un côté est donnée.

1^{er} procédé : à partir de la divine proportion sur un segment :

Voici une construction d'un pentagone régulier de côté a utilisant la relation $d = a \cdot \varphi$ (où d est la longueur d'une diagonale).

On commence par tracer un segment $[AB]$ de longueur a et le point N tel que $AN = a \cdot \varphi$: se reporter à la construction de la page 3.



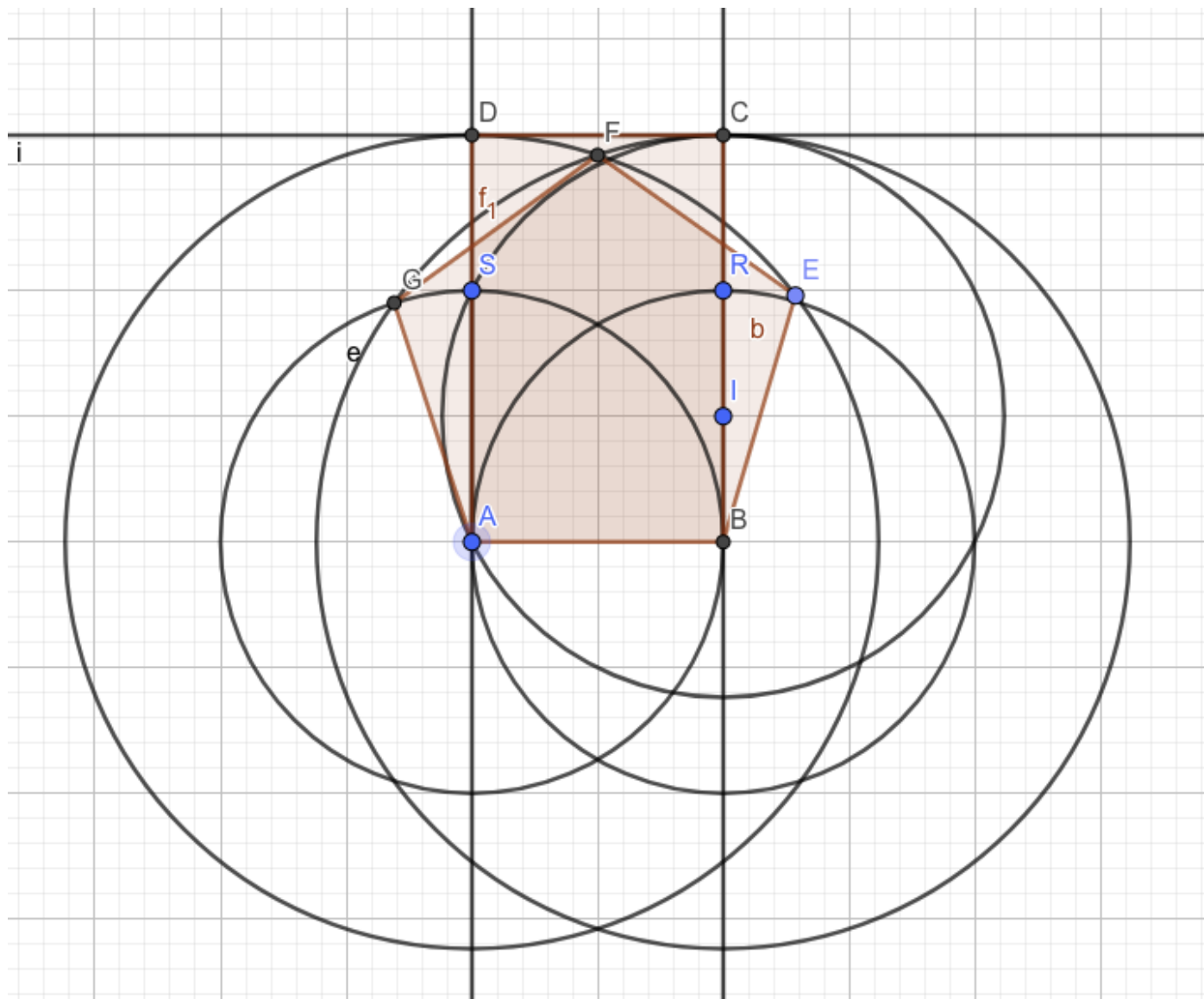
- On construit les cercles de centre A et de rayon a (donc passant par le point B) et $a \cdot \varphi$ (donc passant par le point N).
- On construit la droite perpendiculaire à (AB) en A , et un point P où elle rencontre le cercle de centre A et de rayon a . On a $AP = a \cdot \varphi$ et $[AP]$ va être une diagonale du pentagone régulier.
- On construit la médiatrice de $[AP]$ et un point Q où elle rencontre le cercle de centre A et de rayon a : alors $AQ = PQ = a$, et $[AQ]$ et $[PQ]$ vont être 2 côtés consécutifs de ce pentagone.
- On construit le cercle de centre P et de rayon a et le point S où il coupe le cercle de centre A et de rayon $a \cdot \varphi$ qui n'est pas du même côté de (AP) que le point Q . On a : $PS = a$.
- On construit la droite parallèle à (AP) menée par S (ou le cercle de centre S et de rayon a) coupant (dans le même demi-plan délimité par (AB) que les points P , Q et S) le cercle de centre A et de rayon a en un point R (on se souvient que les diagonales et les côtés d'un pentagone régulier sont parallèles). On a : $SR = AR = a$.

Le polygone $ARSPQ$ a ses 5 côtés égaux et mesurant a :
c'est donc un ***pentagone régulier de côté a*** .

La médiatrice de $[AP]$ est un axe de symétrie de ce polygone, et elle est aussi médiatrice de $[RS]$. Elle coupe la médiatrice de tout autre côté au **centre du cercle circonscrit** à ce polygone.

2^{ème} procédé : à partir de la construction d'un rectangle d'or :

On commence par tracer un carré ABRS de côté mesurant a , le milieu I de $[BR]$, puis le cercle de centre I qui passe par S , sachant que son rayon est $IS = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et le point C (au-dessus de $[AB]$) où ce cercle rencontre la droite (BR) . Puis la perpendiculaire en C à (BC) coupe la droite (AS) en D . On sait (voir page 3) que **ABCD est un rectangle d'or**.

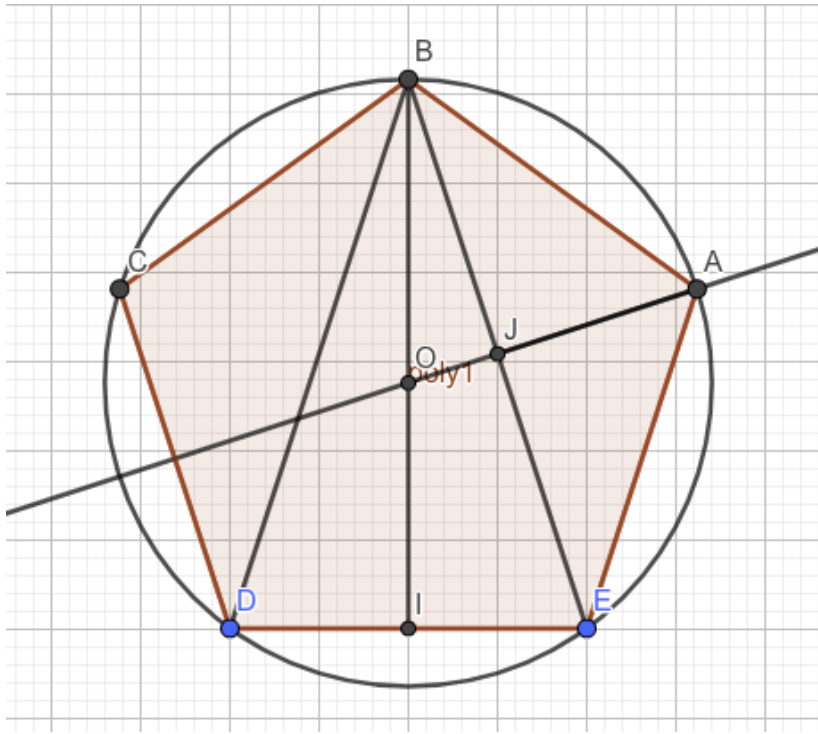


A partir du rectangle d'or ABCD, on trace les cercles : de centre A passant par B, de centre A passant par D, de centre B passant par A et de centre B passant par C.

Ces cercles se recoupent en E, F et G. Il est évident que $AB = BE = EF = FG = GA$.

Le pentagone ABEFG est régulier.

e) Aire et rayon du cercle circonscrit pour un pentagone régulier.



Soit de nouveau un pentagone régulier ABCDE de côté mesurant a .

Soit I le milieu de $[DE]$.

Le centre O du cercle circonscrit à ce pentagone est le point d'intersection des médiatrices de 2 côtés, par exemple de $[DE]$ et de $[BE]$.

1° Soit a_1 l'aire du triangle BDE.

Soit a_2 l'aire du triangle ABE. Alors a_2 est aussi l'aire du triangle BCD.

L'aire du pentagone ABCDE est

$$S = a_1 + 2 a_2.$$

Considérons le triangle BDE. On sait que $DE = a$ et que $BE = a \cdot \varphi$; on a : $IE = \frac{a}{2}$.

On a : $a_1 = \frac{BI \times DE}{2}$ et d'après le théorème de Pythagore : $BI^2 = BE^2 - IE^2 = a^2 (\varphi^2 - \frac{1}{4})$.

Or : $\varphi^2 = \varphi + 1$. Donc : $BI^2 = a^2 (\varphi + \frac{3}{4}) = a^2 \cdot \frac{4\varphi + 3}{4}$ et

$$BI = a \cdot \frac{\sqrt{4\varphi + 3}}{2}$$

Donc : $a_1 = \frac{a}{2} \times a \cdot \frac{\sqrt{4\varphi + 3}}{2}$. On obtient :

$$a_1 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{4\varphi + 3}}{4}$$

Considérons le triangle ABE. Soit J le milieu de $[BE]$. On a : $AB = AE = a$, et $BE = \varphi$.

Le triangle ABE est isocèle et le triangle AJE est rectangle en J, avec $JE = \frac{\varphi}{2}$.

D'après le théorème de Pythagore : $AJ^2 = AE^2 - EJ^2 = a^2 (1 - \frac{\varphi^2}{4}) = a^2 \cdot \frac{4 - \varphi^2}{4}$

Or $\varphi^2 = \varphi + 1$. Donc $AJ^2 = a^2 \cdot \frac{4 - (\varphi + 1)}{4} = a^2 \cdot \frac{3 - \varphi}{4}$.

$$AJ = a \cdot \frac{\sqrt{3 - \varphi}}{2}$$

Et :

Donc : $a_2 = \frac{a \cdot \varphi}{2} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3 - \varphi}}{2} = a^2 \cdot \frac{\varphi \cdot \sqrt{3 - \varphi}}{4}$. Ainsi :

$$a_2 = a^2 \cdot \frac{\varphi \cdot \sqrt{3 - \varphi}}{4}$$

D'où l'aire du pentagone régulier ABCDE : $S = a_1 + 2 a_2 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{4\varphi + 3}}{4} + 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\varphi \cdot \sqrt{3 - \varphi}}{4}$

Or: $\varphi \cdot \sqrt{3 - \varphi} = \sqrt{(3 - \varphi) \cdot \varphi^2} = \sqrt{(3 - \varphi)(\varphi + 1)}$

Et on a : $(3 - \varphi)(\varphi + 1) = 3\varphi + 3 - \varphi^2 - \varphi = 2\varphi + 3 - (\varphi + 1) = \varphi + 2$. Donc :

$$S = \frac{a^2}{4} \cdot (\sqrt{4\varphi + 3} + 2\sqrt{\varphi + 2}) \quad (1)$$

On peut encore simplifier cette expression en remarquant que l'on a :

$$\begin{aligned} 4\varphi + 3 &= (3 - \varphi)(3\varphi + 2) \\ \varphi + 2 &= (3 - \varphi)(\varphi + 1) = (3 - \varphi) \cdot \varphi^2 \end{aligned}$$

En effet : $(3 - \varphi)(3\varphi + 2) = 9\varphi - 3\varphi^2 + 6 - 2\varphi = 7\varphi + 6 - 3(\varphi + 1) = 4\varphi + 3$

Et : $(3 - \varphi)(\varphi + 1) = 3\varphi - \varphi^2 + 3 - \varphi = 2\varphi + 3 - (\varphi + 1) = \varphi + 2$.

Donc on peut écrire : $S = \frac{a^2}{4} \cdot (\sqrt{(3 - \varphi)(3\varphi + 2)} + 2\sqrt{(3 - \varphi)(\varphi + 1)})$

Donc : $S = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3 - \varphi} \cdot (\sqrt{3\varphi + 2} + 2\sqrt{\varphi + 1})$. Or : $3\varphi + 2 = \varphi^4$ (voir les puissances successives de φ) et on sait que $\varphi + 1 = \varphi^2$. Donc $S = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3 - \varphi} \cdot (\varphi^2 + 2\varphi)$.

Donc : $S = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3 - \varphi} (\varphi + 1 + 2\varphi)$, et ainsi :

$$S = \frac{a^2}{4} \cdot (3\varphi + 1) \cdot \sqrt{3 - \varphi} \quad (2)$$

On a : $\frac{5\varphi}{4\sqrt{4 - \varphi^2}} = \frac{5\varphi}{4\sqrt{4 - (\varphi + 1)}} = \frac{5\varphi}{4\sqrt{3 - \varphi}} = \frac{5\varphi\sqrt{3 - \varphi}}{4(3 - \varphi)} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3 - \varphi} \cdot \frac{5\varphi}{3 - \varphi}$

Et : $(3\varphi + 1)(3 - \varphi) = 9\varphi + 3 - 3\varphi^2 - \varphi = 8\varphi + 3 - 3(\varphi + 1) = 5\varphi$, donc : $\frac{5\varphi}{3 - \varphi} = 3\varphi + 1$.

Donc : $\frac{5\varphi}{4\sqrt{4 - \varphi^2}} = \frac{1}{4} \cdot (3\varphi + 1) \cdot \sqrt{3 - \varphi}$. Et on a aussi :

$$S = \frac{5\varphi}{4\sqrt{4 - \varphi^2}} \quad (3)$$

2° Soit $r = OA = OB = OC = OD = OE$ le rayon du cercle circonscrit au pentagone régulier.

Considérons BDE : on a vu que $BI = a \cdot \frac{\sqrt{4\varphi + 3}}{2}$. Or $BI = BO + OI = r + OI$.

Et dans le triangle rectangle OIE, d'après Pythagore : $OI^2 + IE^2 = OE^2$ donc $OI^2 + \frac{a^2}{4} = r^2$

Donc $r^2 - OI^2 = \frac{a^2}{4}$ et $(r + OI)(r - OI) = \frac{a^2}{4}$

$$\begin{aligned} \text{On a : } r + OI &= a \cdot \frac{\sqrt{4\varphi + 3}}{2} \\ \text{Et : } r - OI &= \frac{a}{2\sqrt{4\varphi + 3}} \end{aligned}$$

Par addition : $2r = a \left(\frac{\sqrt{4\varphi + 3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{4\varphi + 3}} \right)$ donc : $4r = a \left(\sqrt{4\varphi + 3} + \frac{1}{\sqrt{4\varphi + 3}} \right)$, donc :

$$4r = a \cdot \frac{4\varphi + 3 + 1}{\sqrt{4\varphi + 3}} = a \cdot \frac{4(\varphi + 1)}{\sqrt{4\varphi + 3}} = a \cdot \frac{4\varphi^2}{\sqrt{4\varphi + 3}}$$

$$\text{Le rayon de ce cercle est : } r = \frac{a \cdot \varphi^2}{\sqrt{4\varphi + 3}} \quad (4)$$

Or on a déjà vu plus haut que : $4\varphi + 3 = (3 - \varphi)(3\varphi + 2)$, et : $3\varphi + 2 = \varphi^4$

Donc : $r = \frac{a \cdot \varphi^2}{\varphi^2 \cdot \sqrt{3 - \varphi}}$ et, finalement, on obtient que :

$$\text{On a : } r = \frac{a}{\sqrt{3 - \varphi}} \quad (5)$$

Avec $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, on peut encore en déduire que :

$$r^2 = a^2 \cdot \frac{2}{5 - \sqrt{5}} = a^2 \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \quad (6)$$